ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ ИНОЯЗЫЧНЫХ СЛУШАТЕЛЕЙ

1. Языковой барьер – не понимают постановку задачи
2. Терминология – новые термины и определения, которых не изучали в своей стране
3. Неумение графически изображать функции, вообще работать с линейкой и карандашом
4. Неумение определять функцию по внешнему виду, по уравнению
5. Неумение строить не по точкам, а с помощью преобразований – смещений, растяжений, сжатий, отображений
6. Непонимание, для чего это делаем – конечная цель построения графика
7. Отсутствие интереса, т.к. нет наглядности и современных средств обучения

ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ. ОТ ПРОСТОГО К СЛОЖНОМУ

Математика есть алфавит, посредством которого Господь начертал Вселенную

Галилео Галилей

Функции и их графики –

одна из самых увлекательных тем в математике

Однако, на нее часто не хватает времени. А те функции, которые проходят – линейная функция, парабола, гипербола – слишком просты, чтобы показать все разнообразие интересных задач.

Умение строить графики функций необходимо для решения задач с параметрами на выпускном и вступительном экзаменах по математике для ПБ. Это одна из первых тем курса математического анализа в вузе. Именно с понятия функции и начинается настоящая, «взрослая» математика. Ведь сложение и вычитание, умножение и деление, дроби и пропорции – это все-таки арифметика. Преобразования выражений – это алгебра. А математика – наука не только о числах, но и о взаимосвязях величин. Язык функций и графиков понятен и физику, и биологу, и экономисту.

Пример начала лекции-презентации
Свойства функций и их графиков

На предыдущей лекции мы ознакомились с темами: ***"Преобразования графиков функций"*** ***;*** ***Построение графиков, содержащих модуль*** аргумента или модуль функции.

На данной лекции мы изучим **Свойства функций и их графиков.**

Изучение свойств функций и их графиков занимает значительное место в математике и не только. Например, в **экономике** – ***функции полезности, издержек, функции спроса, предложения и потребления***, в радиотехнике – функции управления и функции отклика, в статистике – ***функции распределения.***

Применяем гиперссылки

По ходу чтения лекций часто упоминаются ***фамилии*** различных ученых и ***новые термины***. У слушателей возникает вопрос «Кто это такой, когда и где он жил, какими науками занимался?» или почему так называется какой-то термин. Вставляя соответствующую ***гиперссылку***, мы можем, хоть и в краткой форме, удовлетворить это полезное любопытство

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МОЖНО ДАТЬ НЕСКОЛЬКИМИ СПОСОБАМИ.

1. Функция – это *зависимость одной переменной величины от другой.*

Любой **физический закон**, любая **формула** отражает такую взаимосвязь величин. Например, формула $p = \rho g h$ – это зависимость давления жидкости p от глубины h.

Чем больше глубина, **тем больше** давление жидкости. Можно сказать, что давление жидкости является функцией от глубины, на которой его измеряют.

2. Функция – это определенное *действие* над переменной.

Это означает, что мы берем величину x, делаем с ней определенное действие (например, возводим в квадрат или вычисляем ее логарифм) – и получаем величину y.

В технической литературе встречается определение функции как устройства, на вход которого подается x, а на выходе получается y.

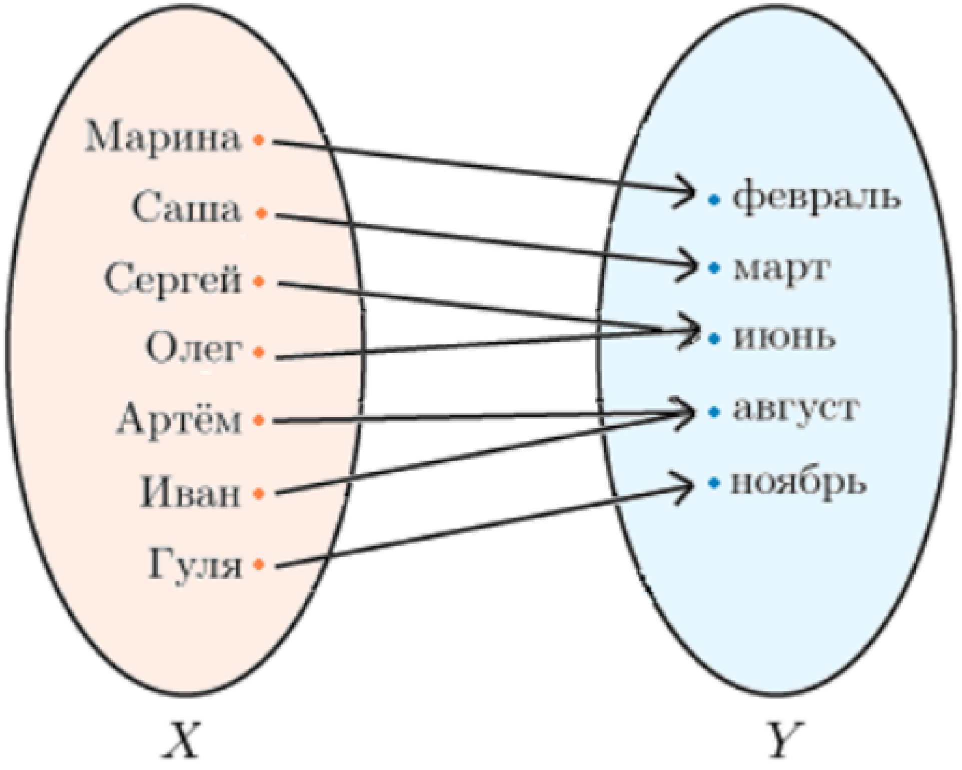
3. *Функция – это соответствие между двумя множествами, причем каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.*

Например, функция $y = 2x$ каждому действительному числу x ставит в соответствие число в два раза большее, чем x.

В математике тоже есть такие взаимно-однозначные функции. Например, линейная функция $y = 3x + 2$. Каждому значению x соответствует одно и только одно значение y. И наоборот – зная y, можно однозначно найти x.

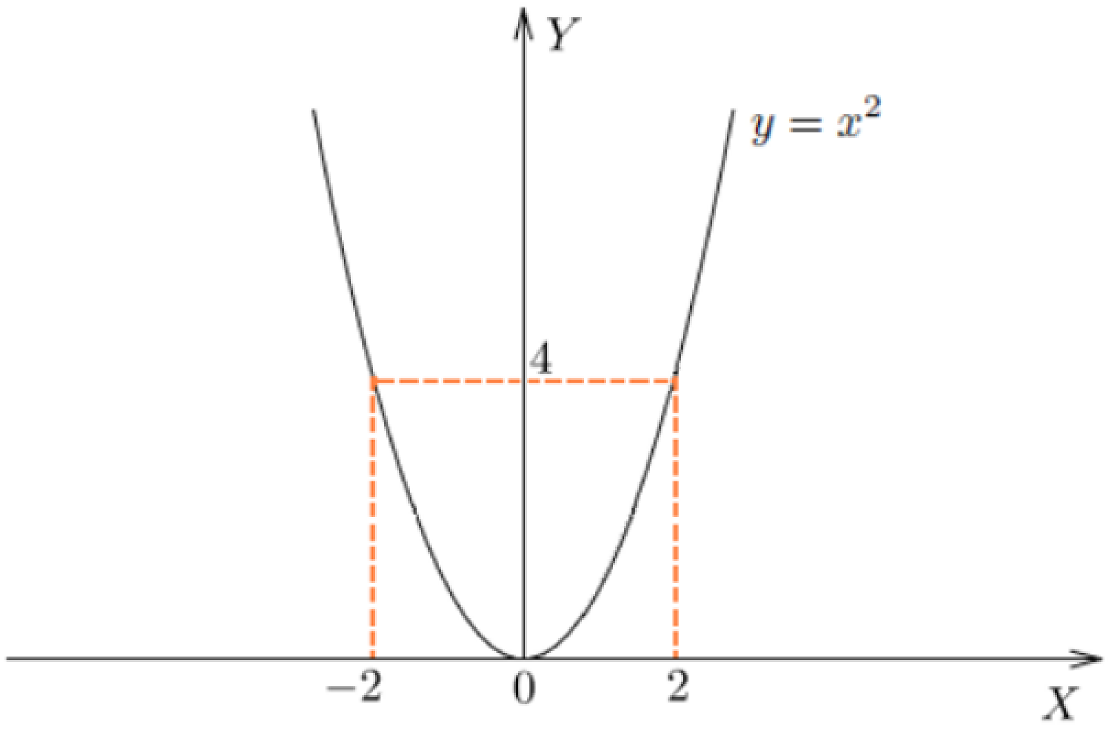
x	–3	–2	–1	0	1	2
$y = 3x + 2$	–7	–4	–1	2	5	8

Могут быть и другие типы соответствий между множествами. Возьмем для примера компанию друзей и месяцы, в которые они родились:

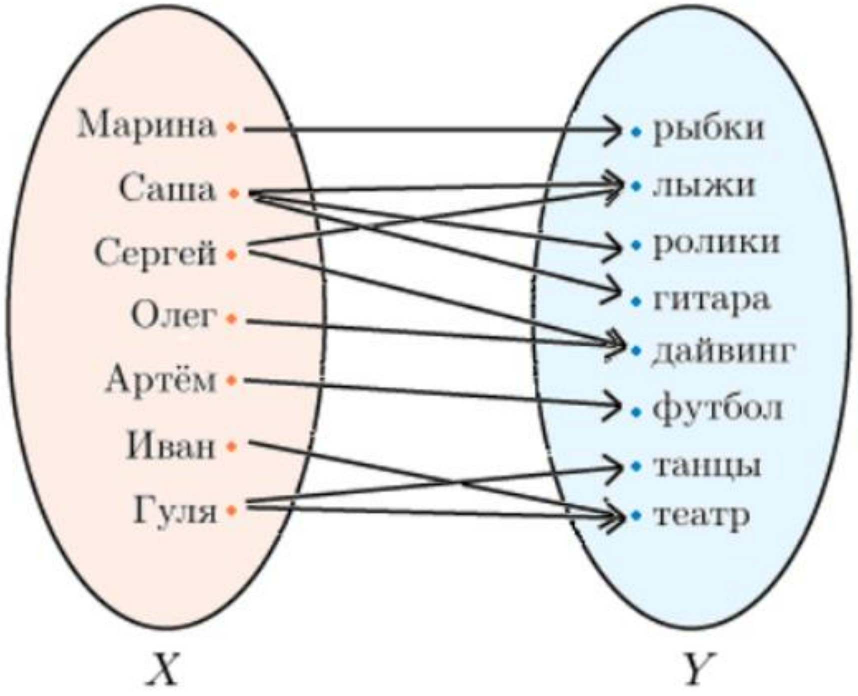


Каждый человек родился в какой-то определенный месяц. Но данное соответствие не является взаимно-однозначным. Например, в июне родились Сергей и Олег.

Пример такого соответствия в математике – функция $y = x^2$. Один и тот же элемент второго множества $y = 4$ соответствует двум разным элементам первого множества: $x = 2$ и $x = -2$.

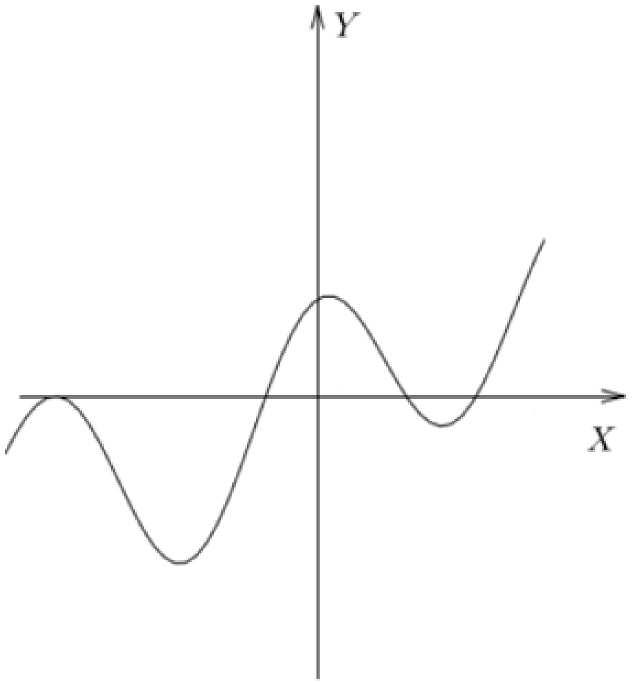


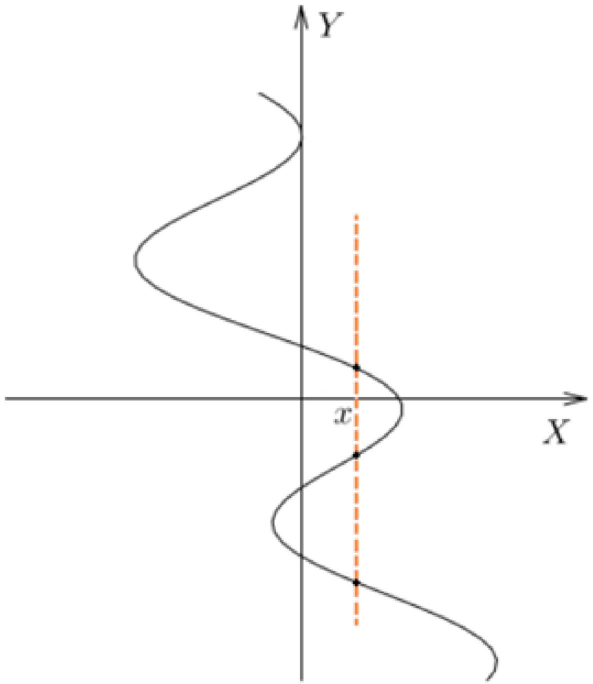
А каким должно быть соответствие между двумя множествами, чтобы оно не являлось функцией? Возьмем ту же компанию друзей и их хобби:



Мы видим, что в первом множестве есть элементы, которым соответствует два или три элемента из второго множества.

На рисунках изображены кривые. Как вы думаете, какая из них является графиком функции, а какая – нет?





Ответ очевиден. Первая кривая – это график некоторой функции, а вторая – нет. Ведь на ней есть точки, где каждому значению x соответствует не одно, а целых три значения y.

4. **Тригонометрические**. В их формулах присутствуют синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы.

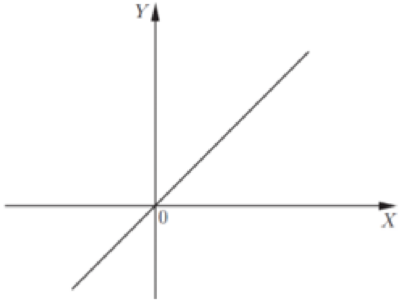
5. **Обратные тригонометрические**. Содержат arcsinx, arccosx, arctgx, arcctgx.

Элементарными они называются, потому что из них, как из элементов, получаются все остальные, встречающиеся в школьном курсе. Например, $y = x^2 \cdot e^x$ — произведение квадратичной и показательной функций; $y = \sin(a^x)$ — сложная функция, то есть комбинация двух функций — показательной и тригонометрической.

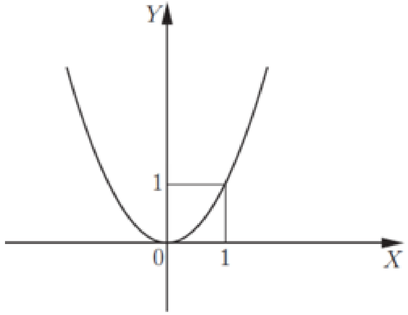
Графики и свойства основных элементарных функций следует **знать наизусть**.

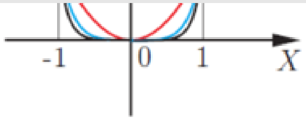
Степенные функции

1. Линейная функция $y = x$



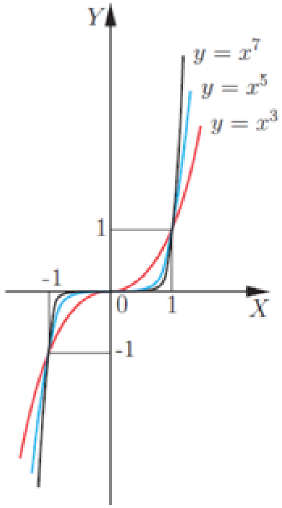
2. Квадратичная парабола $y = x^2$



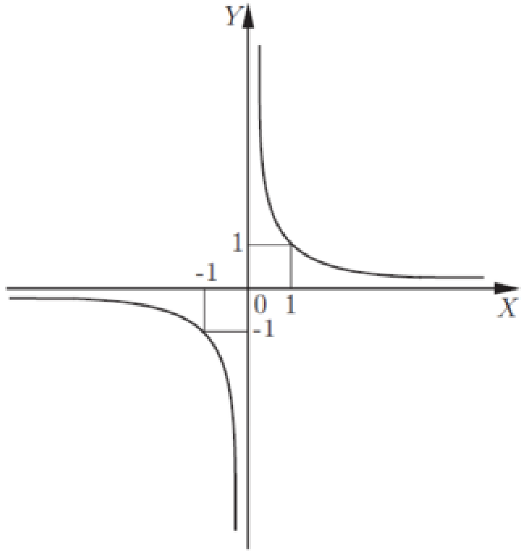


n - нечётное

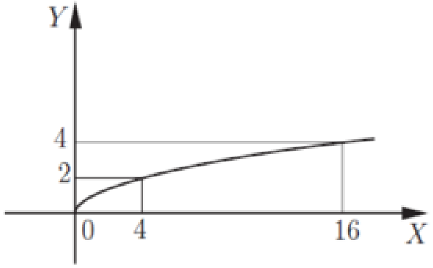
n = 3, 5, 7, …



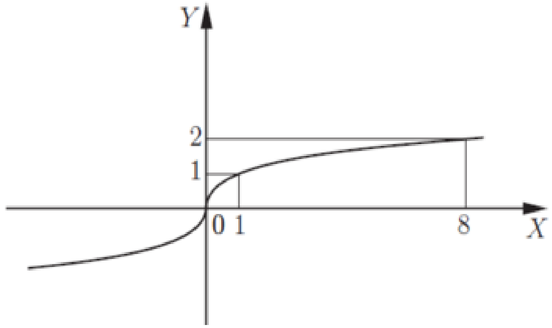
4.Гипербола $y = \frac{1}{x}$



5. $y = \sqrt{x}$



6. $y = \sqrt[3]{x}$



Преобразование графиков функций

Что нужно сделать с формулой функции, чтобы сдвинуть ее график по горизонтали или по вертикали? Как задать растяжение графика по горизонтали или вертикали? Как отразить график относительно оси X или Y?

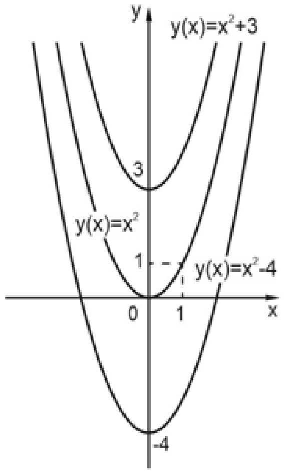
1. Сдвиг по горизонтали.

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $a>0$.

Тогда график функции $y = f(x-a)$ сдвинут относительно исходной на a вправо.

График функции $y = f(x+a)$ сдвинут относительно исходной на a влево.

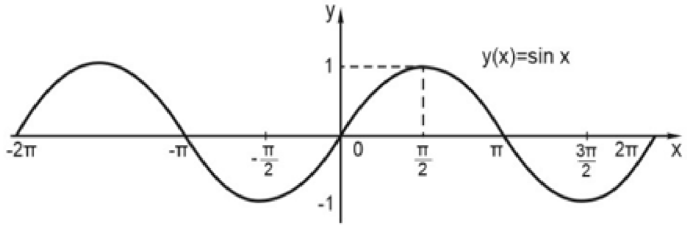
График функции $y = f(x) - C$ сдвинут относительно исходного на C вниз.

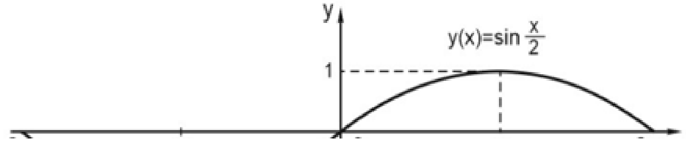


3. Растяжение (сжатие) по горизонтали.

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $k>0$.

Тогда график функции $y = f(kx)$ растянут относительно исходного в k раз по горизонтали, если $0<k<1$, и сжат относительно исходного в k раз по горизонтали, если $k>1$.





Преобразование графиков функций

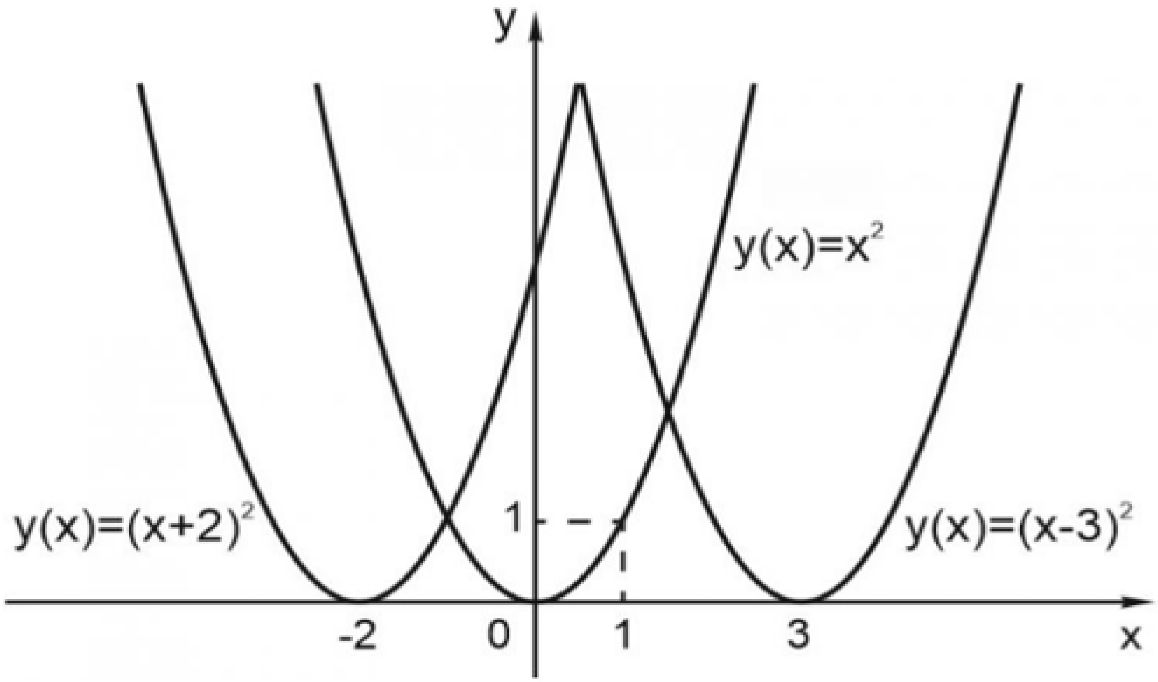
Что нужно сделать с формулой функции, чтобы сдвинуть ее график по горизонтали или по вертикали? Как задать растяжение графика по горизонтали или вертикали? Как отразить график относительно оси X или Y?

1. Сдвиг по горизонтали.

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $a>0$.

Тогда график функции $y = f(x - a)$ сдвинут относительно исходной на а вправо.

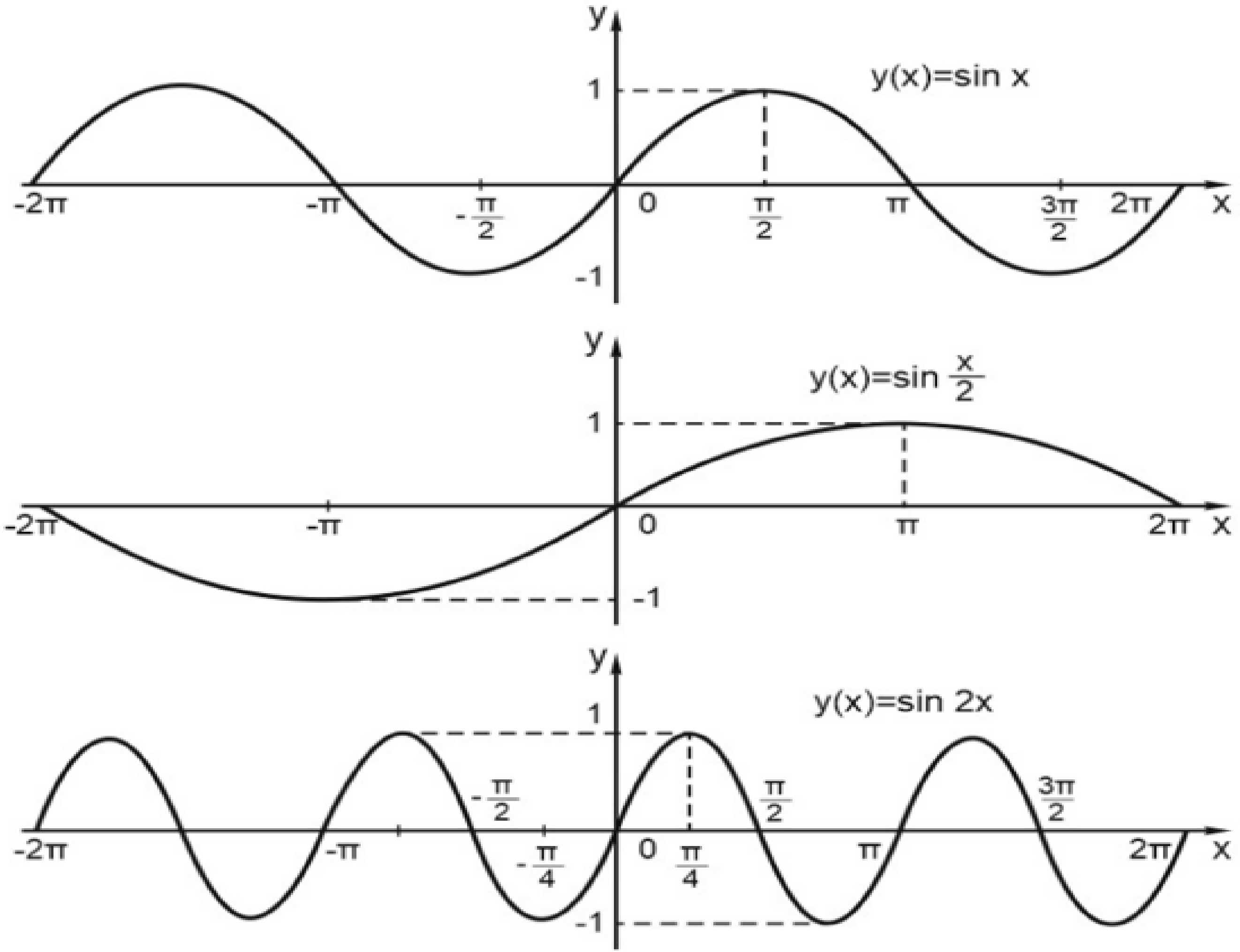
График функции $y = f(x + a)$ сдвинут относительно исходной на а влево.



3. Растяжение (сжатие) по горизонтали.

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $k>0$.

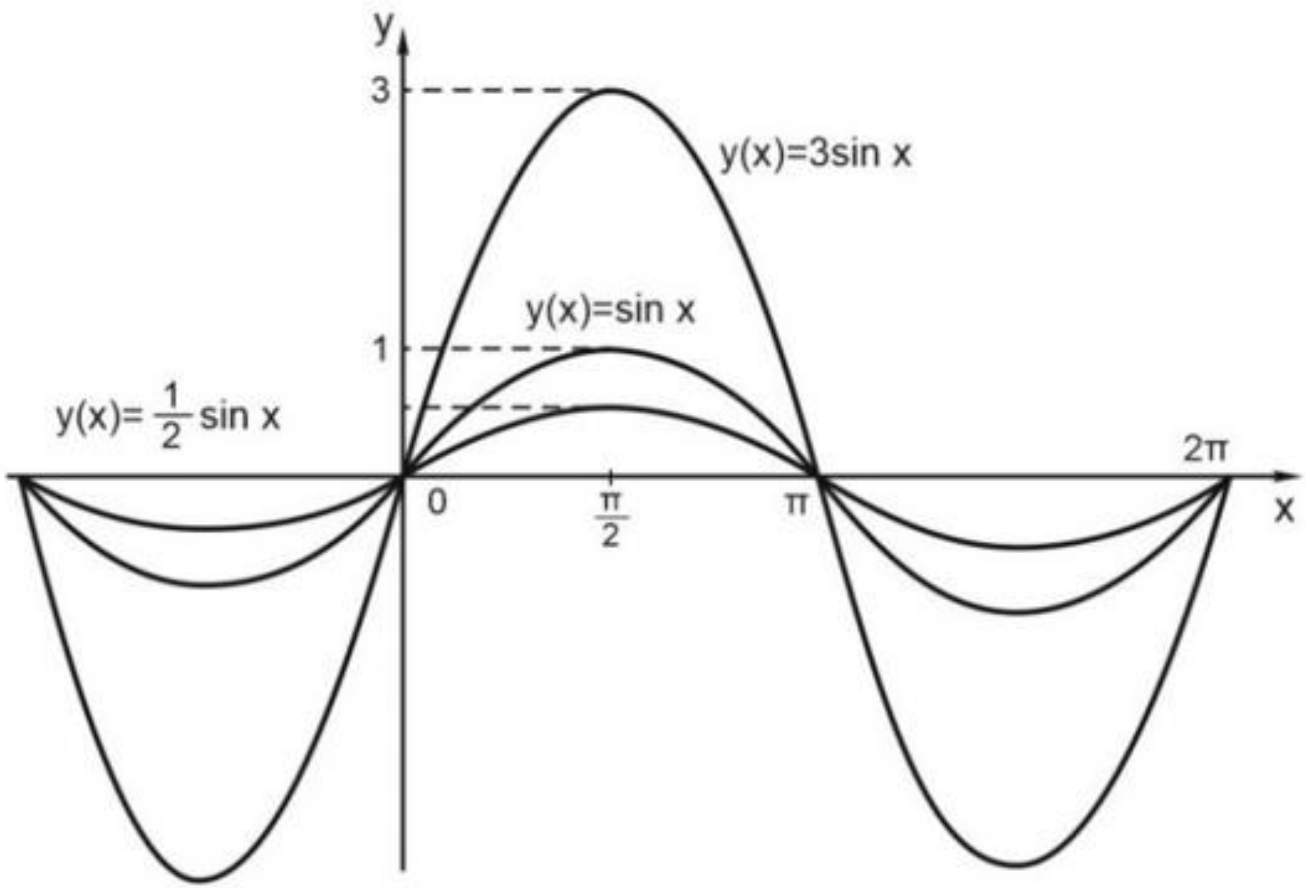
Тогда график функции $y = f(kx)$ растянут относительно исходного в k раз по горизонтали, если $0<k<1$, и сжат относительно исходного в k раз по горизонтали, если $k>1$.



4. Растяжение (сжатие) по вертикали.

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $M > 0$.

Тогда график функции $y = M \cdot f(x)$ растянут относительно исходного в М раз по вертикали, если $M > 1$, и сжат относительно исходного в М раз по вертикали, если $0 < M < 1$.



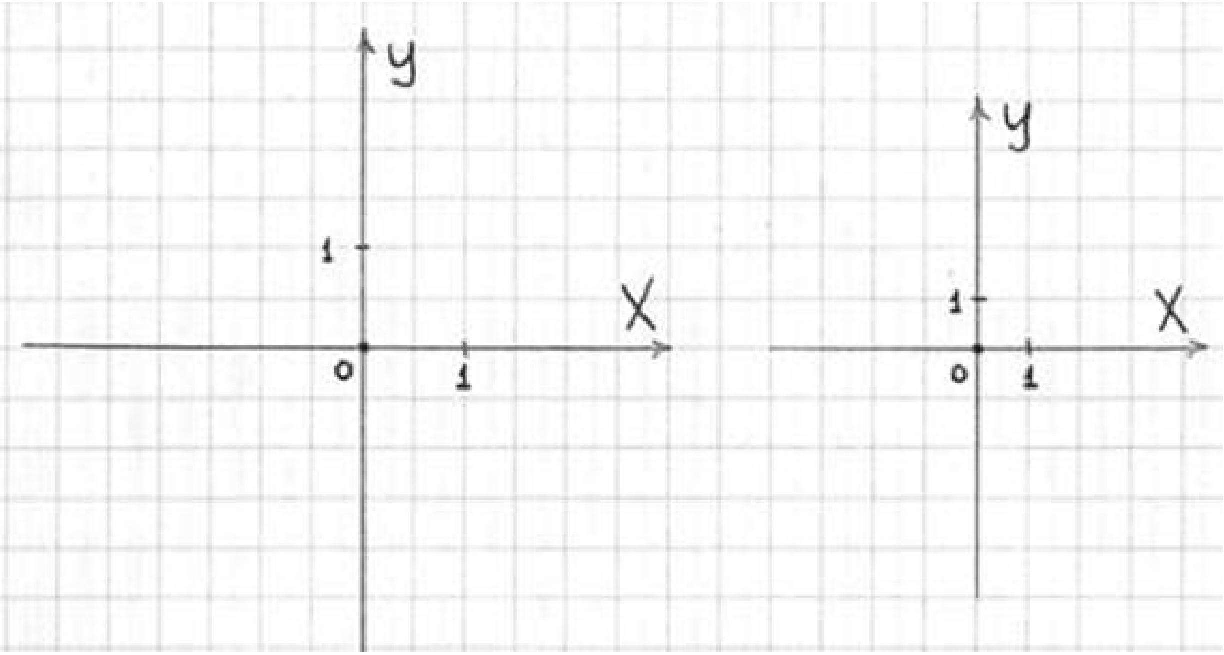
Пункт 1. Как правильно построить координатные оси

Зачем нужна **клетчатая разметка**? Клетка необходима для качественного и точного оформления чертежей.

Любой чертеж графика функции начинается с координатных осей**.**

Чертежи бывают двухмерными и трехмерными.

Сначала рассмотрим двухмерный случай *декартовой прямоугольной системы координат*:



Чертим ***координатные оси***. Ось OX называется ***осью абсцисс***, а ось OY – ***осью ординат***. Чертить их всегда стараемся **аккуратно**.

Подписываем оси большими буквами «икс» и «игрек». **Не забываем подписывать оси**.

Задаем ***масштаб*** по осям: **рисуем ноль и две единички**. При выполнении чертежа самый

Графики функций с модулями

Покажем полезные примеры построения графиков модулей функций.

Построим графики функций:

а) $y = -x^2 + 6x - 8$

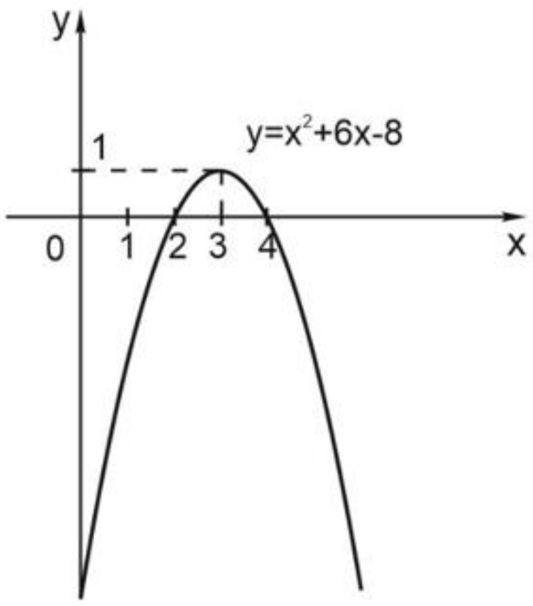
б) $y = |-x^2 + 6x - 8|$

в) $y = -x^2 + 6|x| - 8$

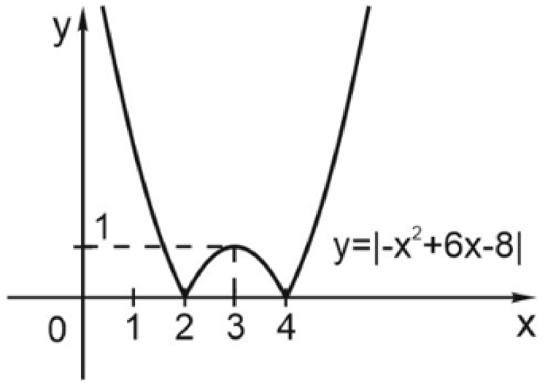
а) Первый график построить легко. Выделим полный квадрат в формуле функции $y = -x^2 + 6x - 8$.

$y = -x^2 + 6x - 8 = -(x^2 - 6x + 8) = -(x^2 - 6x + 9 - 1) =$
$-(x-3)^2 + 1.$

График – квадратичная парабола, сдвинутая на 3 влево и на 1 вверх и перевернутая ветвями вниз.

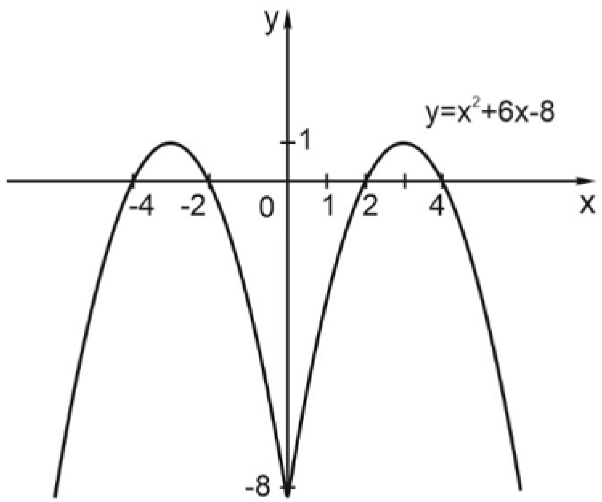


б) Чтобы построить график функции $y = |-x^2 + 6x - 8|$, зеркально отражаем относительно оси X те части первого графика, которые лежали под ней. А та часть первого графика, которая лежала выше оси X, остается на месте. Точки (2; 0) и (4; 0), в которых график пересекал ось X, также остаются на месте.



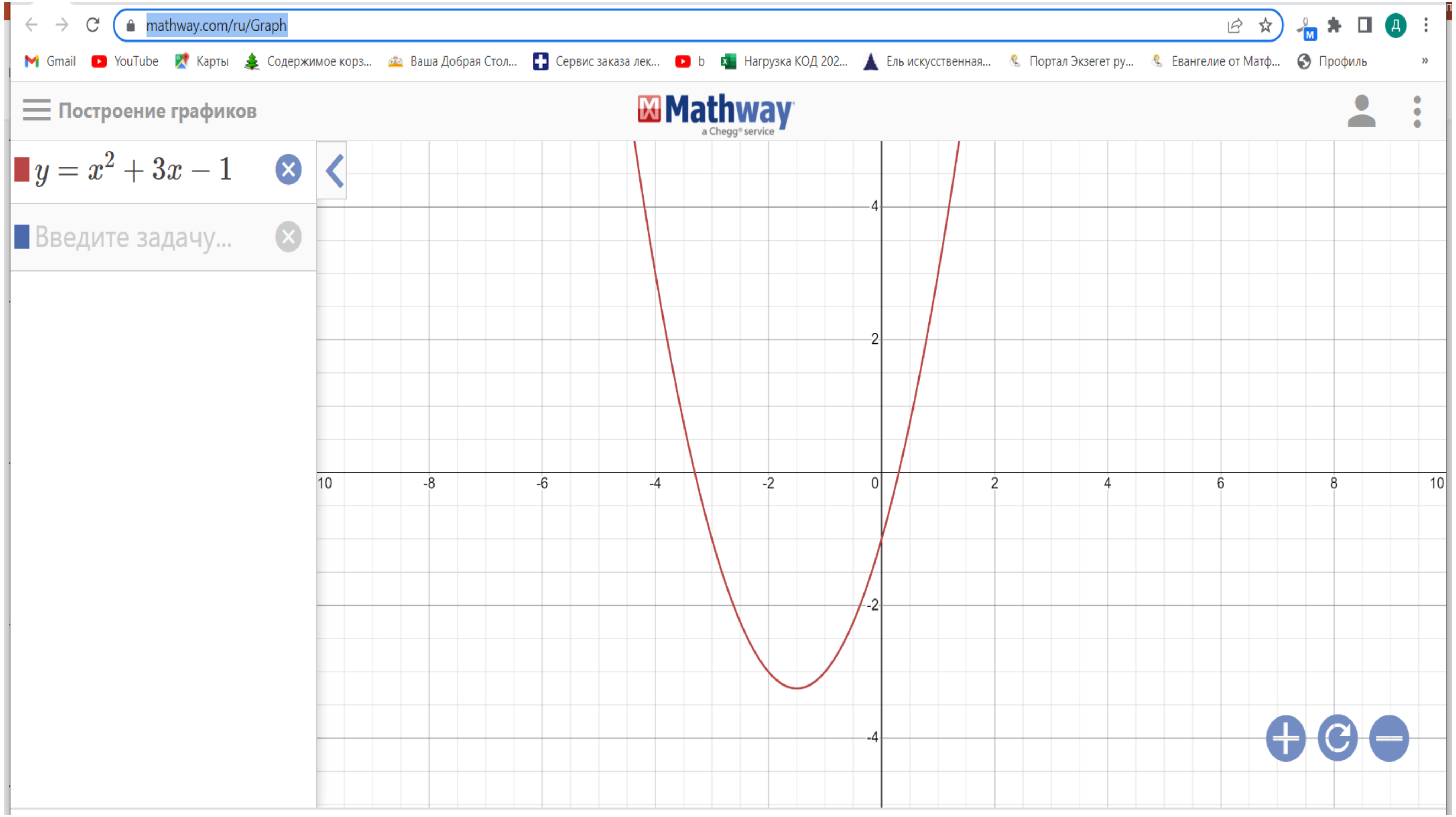
в) Теперь график функции $y = -x^2 + 6|x| - 8$.

Он тоже получается из графика первой функции, но преобразования другие. Часть первого графика, лежащая справа от оси Y, остается на месте. Действительно, модуль неотрицательного числа равен самому этому числу. Получили график функции для неотрицательных x. И отражаем его зеркально относительно оси Y в левую полуплоскость.



Как и зачем построить график онлайн?

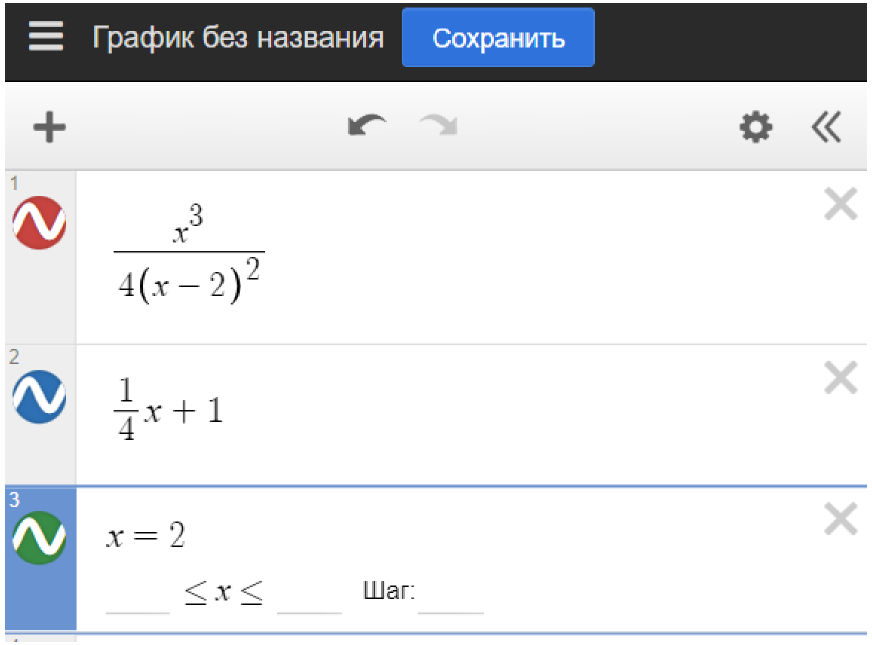
Даже если требуется сдавать задание, **написанное от руки**, с чертежом на листке в клеточку, будет крайне полезно во время решения построить график в специальной программе (или сервисе), чтобы проверить ход решения, сравнить его вид с тем, что получается вручную, возможно, найти ошибки в своих расчетах (когда графики явно ведут себя непохоже).



mathway.com/ru/Graph
Gmail
YouTube
Карты
Содержимое корз...
Ваша Добрая Стол...
Сервис заказа лек...
b
Нагрузка КОД 202...
Ель искусственная...
Портал Экзегет ру...
Евангелие от Матф...
Профиль
Построение графиков
Mathway
a Chegg service
$y = x^2 + 3x - 1$
Введите задачу...

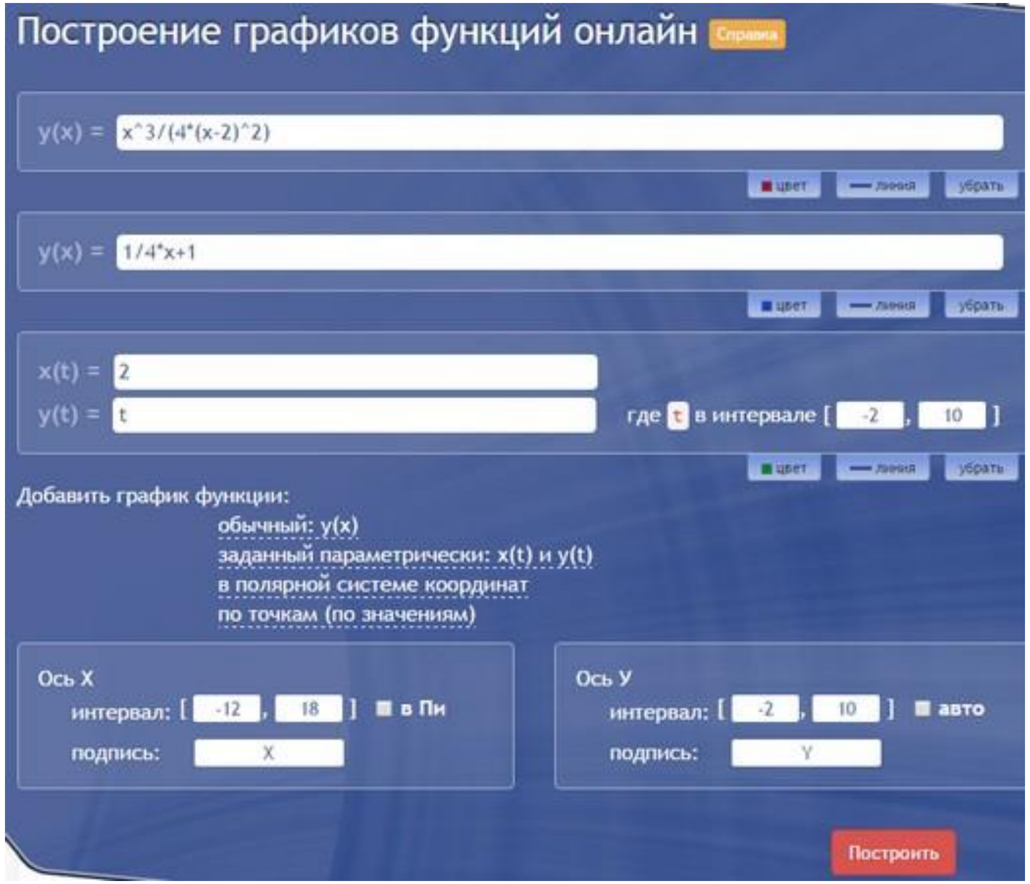
Графический калькулятор Desmos *Desmos.com*

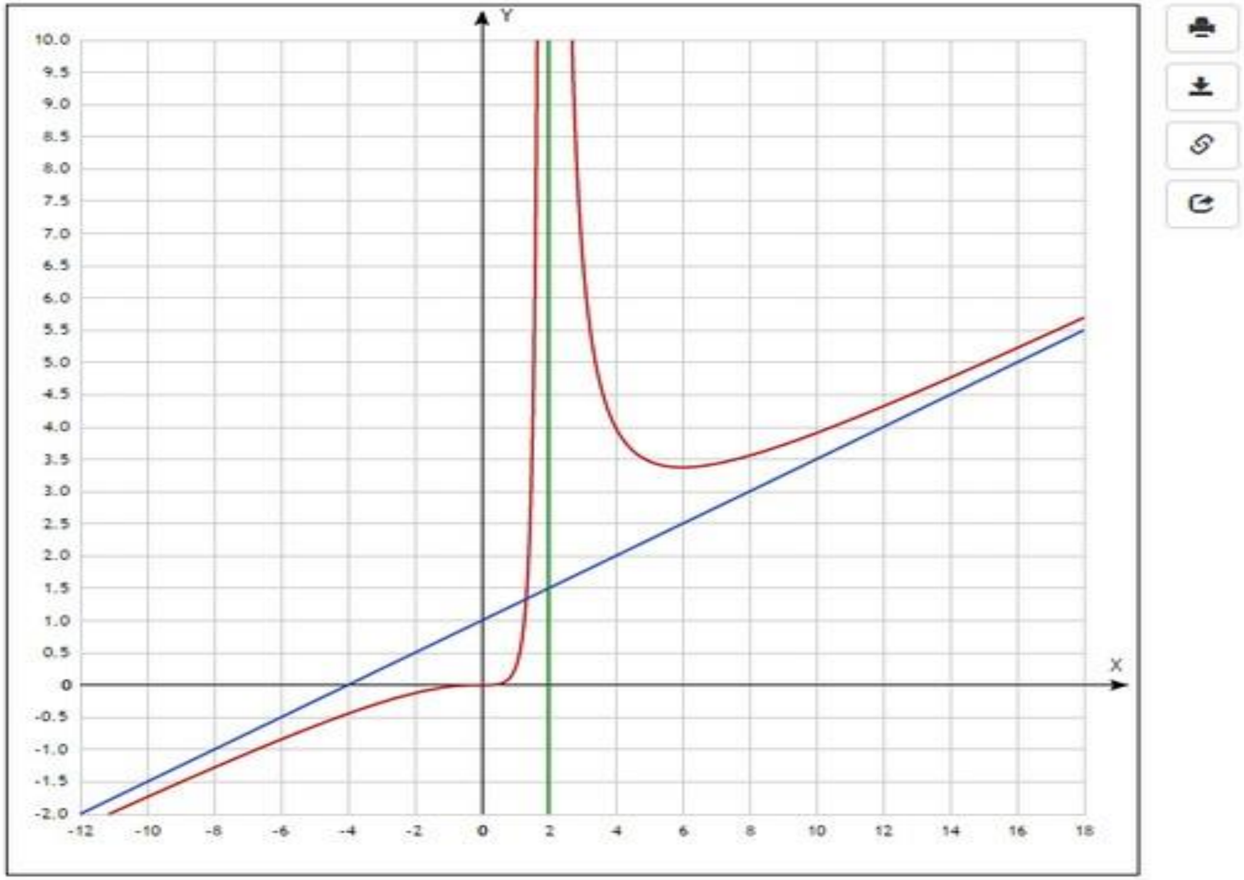
Гибкий и функциональный графический калькулятор. Интутивно понятно вводятся формулы (прямо на ходу преобразуются), автоматически подбираются масштаб и цвета графика для максимальной наглядности. Например, для функции $y(x)=x^3/4(x-2)$ буквально за минуту построены основной график и асимптоты.



Сайт для построения графиков y(x).ru *y(x).ru*

Это уже наш продукт, возможно, не такой красивый и интерактивный, но вполне подходящий для учебных целей. Можно строить онлайн несколько графиков одновременно, при этом выбирать и обычный, и параметрический вид, и даже задание в полярных координатах. Цвет и масштаб можно менять вручную.





$y(x) = \frac{x^3}{4(x-2)^2}$ Показать таблицу точек

$y(x) = \frac{x}{4} + 1$ Показать таблицу точек

$x(t) = 2 \quad y(t) = t$

Еще несколько сервисов, которые обладают меньшим удобством/функциональностью, но тоже достойны внимания:

ru.numberempire.com Можно построить сразу несколько функций, цвета подбираются автоматически, график интерактивный (положение и масштаб меняются мышкой).

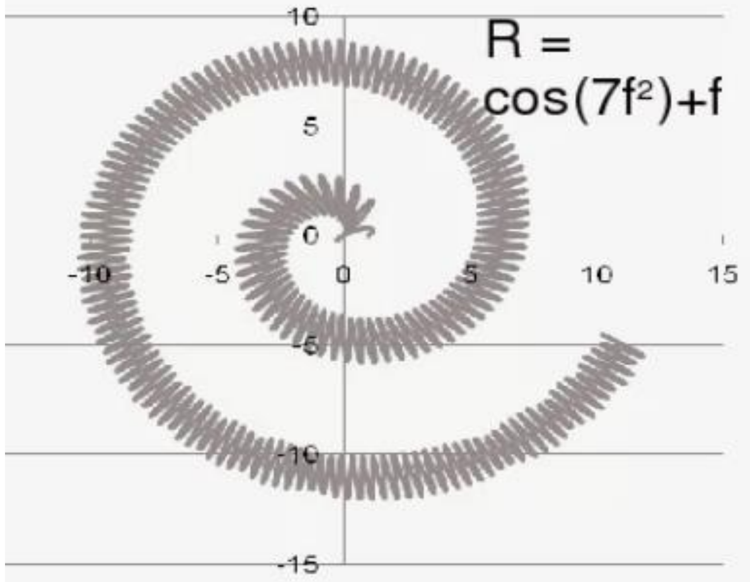
mathsolution.ru Можно строить несколько графиков, выбирая толщину линий и цвет, скрывать/отображать сетку, менять масштаб, сохранять картинки в файл.

easyto.me При построении нескольких графиков на одном поле предыдущие не редактируются. В остальном функции как у прежних: выбор цвета, толщины линии, масштаба чертежа.

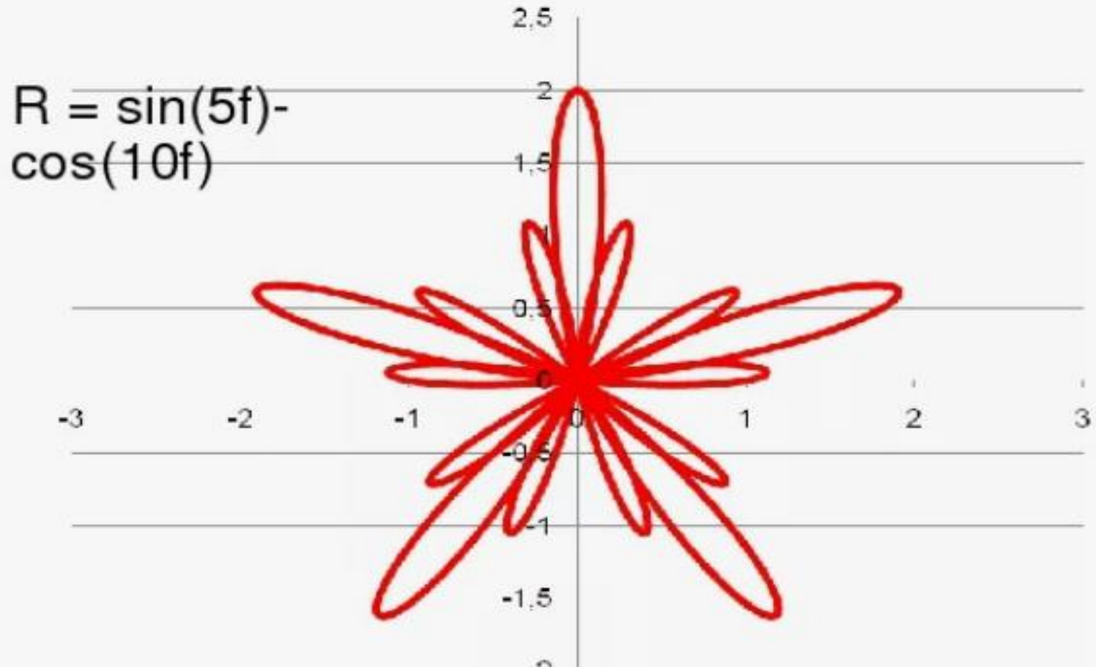
grafikus.ru Кроме обычных графиков можно также строить трехмерные (3d). Можно построить несколько графиков разного типа (обычный, параметрический, в полярных координатах). Цвет и толщину линии выбрать нельзя. Интерактивности нет.

Примеры графиков функций – задание функции в полярных координатах

Колебательная спираль



Петля



Зонтик

$y=-\frac{1}{18}x^2+12, \quad x\in[-12;12];$

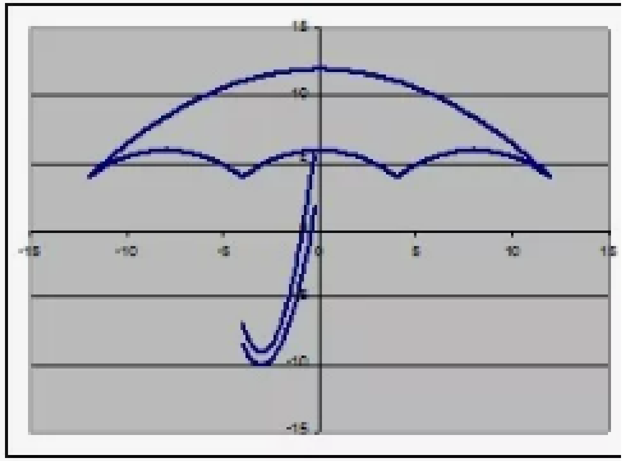
$y=-\frac{1}{8}x^2+6, \quad x\in[-4;4];$

$y=-\frac{1}{8}(x+8)^2+6, \quad x\in[-12;-4];$

$y=-\frac{1}{8}(x-8)^2+6, \quad x\in[4;12];$

$y=2(x+3)^2-9, \quad x\in[-4;-0{,}3];$

$y=1{,}5(x+3)^2-10, \quad x\in[-4;0{,}2].$



Очки

$y=-\frac{1}{16}(x+5)^2+2, \quad x\in[-9;-1];$

$y=-\frac{1}{16}(x-5)^2+2, \quad x\in[1;9];$

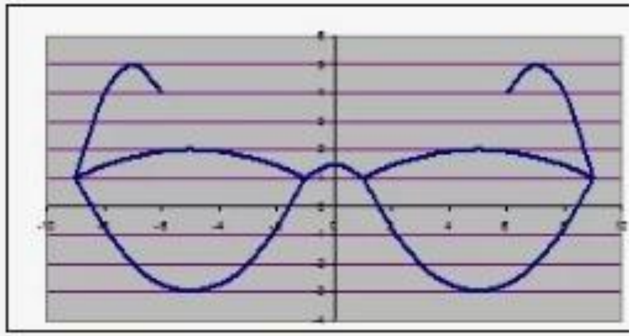
$y=\frac{1}{4}(x+5)^2-3, \quad x\in[-9;-1];$

$y=\frac{1}{4}(x-5)^2-3, \quad x\in[1;9];$

$y=-(x+7)^2+5, \quad x\in[-9;-6];$

$y=-(x-7)^2+5, \quad x\in[6;9].$

$y=-0.5x^2+1.5, \quad x\in[-1;1].$



Кит

$y=\frac{2}{27}x^2-3, \quad x\in[0;9];$

$y=0{,}04x^2-3, \quad x\in[-10;0];$

$y=\frac{2}{9}(x+6)^2+1, \quad x\in[-9;-3];$

$y=-\frac{1}{12}(x-3)^2+6, \quad x\in[-3;9];$

$y=\frac{1}{9}(x-5)^2+2, \quad x\in[5;8{,}3];$

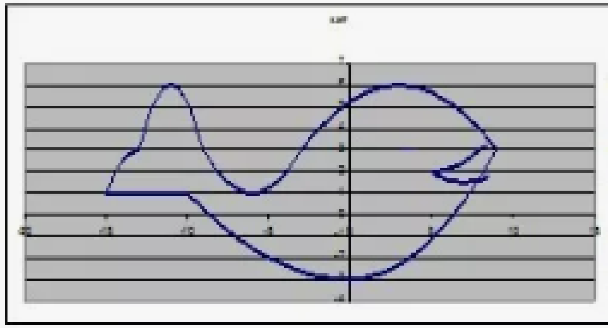
$y=\frac{1}{8}(x-7)^2+1{,}5, \quad x\in[5;8{,}5];$

$y=-0{,}75(x+11)^2+6, \quad x\in[-13;-9];$

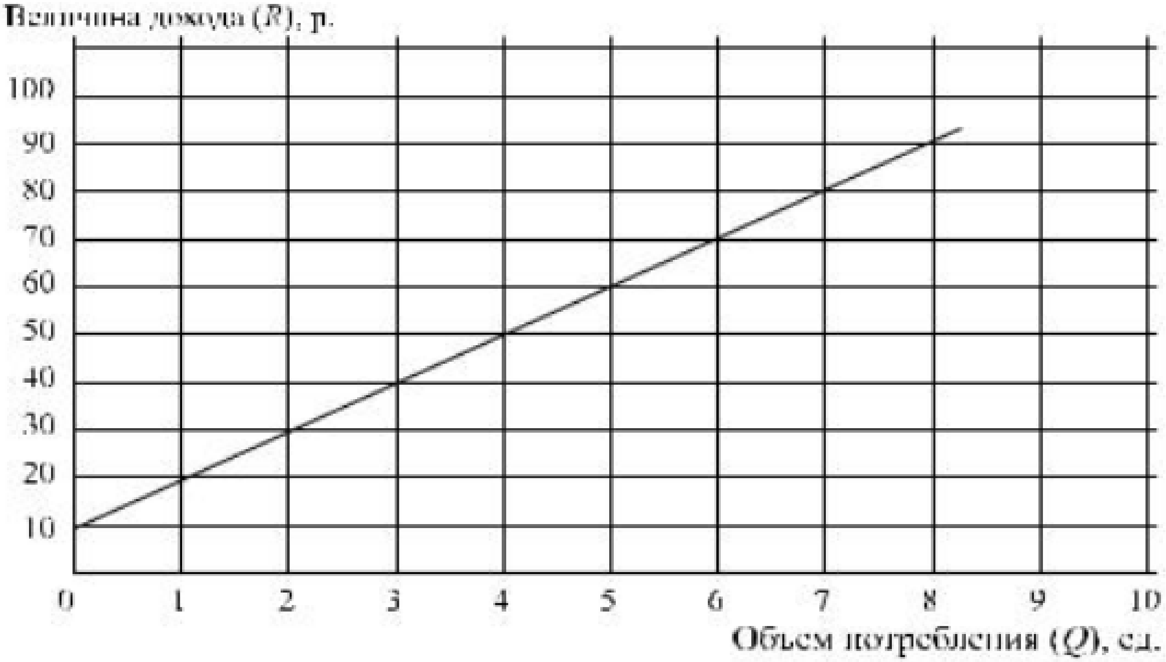
$y=-0{,}5(x+13)^2+3, \quad x\in[-15;-13];$

$y=1, \quad x\in[-15;-10];$

$y=3, \quad x\in[3;4].$

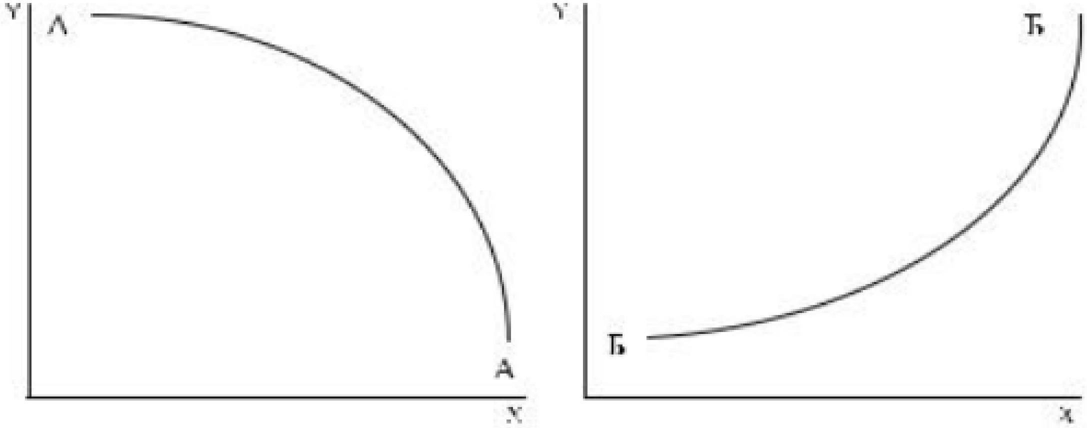


1. Составьте таблицу на основе данных, изображенных на графике.



2. Составьте график на основе следующих данных: сбережения: 0, 10 000, 20 000, 30 000 р.; доход: 1 000, 20 000, 40 000, 60 000 р.

3. Определите на приведенном графике, каким – положительным или отрицательным – является ли наклон кривых АА и ББ.



Спасибо за внимание!

Нам нужно донести обучение до учеников, а не учеников до обучения.

ЭЛЛИОТ МЕЙСИ